MA1111.
Enero-Abril 2005.
Examen Tipo A1.
Soluciones.

1. **Resuelva** $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| \leq 1.$
   Solución:
   Observe que si $x \neq -2$, entonces $|x+2| > 0$ para todo valor real de x. Asi que resolver la desigualdad $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| \leq 1$. es equivalente a resolver $|x-1| \leq |x+2|$ siempre que recordemos extraer $x = -2$ de nuestra solución. Entonces,

$$\begin{aligned} |x-1| &\leq |x+2| \\ (x-1)^2 &\leq (x+2)^2 \\ x^2-2x+1 &\leq x^2+4x+4 \\ 6x+3 &\geq 0 \\ x &\geq -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   Ahora, como $x = -2$ no pertenece al intervalo $[-1/2, \infty)$, la solución es $S = [-1/2, \infty)$. Observe que si resolvemos la desigualdad $-1 \leq \frac{x-1}{x+2} \leq 1$ separando en dos casos e intersectando las soluciones respectivas, se obtiene el mismo resultado.

2. **Sea** L **la recta de ecuación** $y = x + 6$ **y** C **la circunferencia que pasa por los puntos** $A(8, 0)$, $B(0, 6)$, **y** $O(0, 0)$. **Halle los dos puntos de intersección de** C **y** L.
   Sugerencia: Recuerde que el centro de una circunferencia circunscrita a un triángulo se encuentra en las perpendiculares de las bisectrices de los lados.
   Solución:
   Calculamos primero los puntos medios de los lados:

$$PM(A,B) = \left(\frac{8+0}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (4,3),$$

$$PM(A,O) = \left(\frac{8+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (4,0),$$

$$PM(B,O) = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (0,3).$$

   Note que la intersección de las perpendiculares a las bisectrices ocurre en el punto $(4, 3)$. Asi el centro de la circunferencia C es el punto $(4, 3)$. El radio r de C viene dado por la distancia del centro $(4, 3)$ a cualquiera de los puntos dados. Por ejemplo,

$$r = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5.$$

De esta forma la ecuación de la circunferencia C viene dada por

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2.$$

Intersectando la circunferencia C con la recta L obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 25 &= (x-4)^2 + (y-3)^2 \\ &= (x-4)^2 + (x+3)^2 \\ & \text{(pues } y-3 = x+3 \text{ dada la ecuación de } L) \\ &= 2x^2 - 2x + 25, \end{aligned}$$

cuya solución es $x = 0$ y $x = 1$. Por lo tanto los puntos de intersección de la circunferencia C con la recta L son: $(0,6)$ y $(1,7)$.

3. **Sea $f(x)$ la función definida por**

$$f(x) = \begin{cases} x\,|x| & \textbf{si } x \le 2 \\ 3x & \textbf{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Bosqueje la gráfica de f. Observe que f puede ser re-escrita de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 3x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(b) **Halle la imagen de** f.
Proyectando la gráfica sobre el eje y tenemos que $Im(f) = (-\infty, 4] \cup (6, +\infty)$. Ver gráfica en parte (a).
(c) **Diga justificando si f es inyectiva o no.**
Solución:
Como la función es estrictamente creciente (ver gráfica en parte (a)), f es

inyectiva y como tal posee inversa.
(d) **Halle la función inversa de** f.
Solución:
Sea g la inversa de f. Entonces,
$g : (-\infty, 4] \cup (6, +\infty) \to R$

$$g(x) = f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{x}{3} & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

(e)**Sea** $h(x) = \sqrt{4 - |x|}$**. Encuentre** $f \circ h$.
Solución:
Observando que

$$0 \leq \sqrt{4 - |x|} \leq 2,$$

se tiene:

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = (\sqrt{4 - |x|})^2 = |4 - |x|| = 4 - |x|\,,$$

pues el dominio de la función h es el intervalo $[-2, 2]$.

4. Sean $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = \sqrt{6x - 3}$.
(a) Calcule $H(x) = (g \circ f)(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.
Solución:

$$H(x) = g(f(x)) = \sqrt{6f(x) - 3} = \sqrt{6sen(x) - 3} = \sqrt{6}\sqrt{sen(x) - 1/2}.$$

(b) **Halle el dominio natural de** $H(x)$ **en el intervalo** $[0, \pi]$
Solución:

$$\begin{array}{rcl} sen(x) - \dfrac{1}{2} & \geq & 0 \\ sen(x) & \geq & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\pi}{6} & \leq x \leq & \dfrac{5\pi}{6}. \end{array}$$

(c) Rango de H.
Como $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$,

$$\begin{array}{rcl} 1/2 \leq & sen(x) & \leq 1 \\ 0 \leq & sen(x) - 1/2 & \leq 1/2 \\ 0 \leq & \sqrt{sen(x) - 1/2} & \leq \sqrt{2}/2 \\ 0 \leq & \sqrt{6}\sqrt{sen(x) - 1/2} & \leq \sqrt{6}\sqrt{2}/2 \\ 0 \leq & H(x) & \leq \sqrt{3}. \end{array}$$

Asi, $Im(H) = [0, \sqrt{3}]$.

MA1111.
Enero-Abril 2005.
Examen Tipo A2.
Soluciones.

1. **Resuelva** $\left|\frac{x-2}{x+1}\right| \leq 1$.
   Solución:
   Observe que si $x \neq -1$, entonces $|x+1| > 0$ para todo valor real de x. Asi que resolver la desigualdad $\left|\frac{x-2}{x+1}\right| \leq 1$. es equivalente a resolver $|x-2| \leq |x+1|$ siempre que recordemos extraer $x = -1$ de nuestra solución. Entonces,

$$\begin{aligned} |x-2| &\leq |x+1| \\ (x-2)^2 &\leq (x+1)^2 \\ x^2-4x+4 &\leq x^2+2x+1 \\ 6x-3 &\geq 0 \\ x &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

   Ahora, como $x = -1$ no pertenece al intervalo $[1/2, \infty)$, la solución es $S = [1/2, \infty)$. Observe que si resolvemos la desigualdad $-1 \leq \frac{x-1}{x+2} \leq 1$ separando en dos casos e intersectando las soluciones respectivas, se obtiene el mismo resultado.

2. **Sea** L **la recta de ecuación** $y = x - 6$ **y** C **la circunferencia que pasa por los puntos** $A(8,0)$, $B(0,6)$, **y** $O(0,0)$. **Halle los dos puntos de intersección de** C **y** L.
   Sugerencia: Recuerde que el centro de una circunferencia circunscrita a un triángulo se encuentra en las perpendiculares de las bisectrices de los lados.
   Solución:
   Calculamos primero los puntos medios de los lados:

$$PM(A,B) = \left(\frac{8+0}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (4,3),$$

$$PM(A,O) = \left(\frac{8+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (4,0),$$

$$PM(B,O) = \left(\frac{0+0}{2}, \frac{6+0}{2}\right) = (0,3).$$

   Note que la intersección de las perpendiculares a las bisectrices ocurre en el punto $(4,3)$. Asi el centro de la circunferencia C es el punto $(4,3)$. El radio r de C viene dado por la distancia del centro $(4,3)$ a cualquiera de los puntos dados. Por ejemplo,

$$r = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5.$$

De esta forma la ecuación de la circunferencia C viene dada por

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 5^2.$$

Intersectando la circunferencia C con la recta L obtenemos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} 25 &= (x-4)^2 + (y-3)^2 \\ &= (x-4)^2 + (x-9)^2 \\ &\quad \text{(pues } y-3 = x-9 \text{ dada la ecuación de } L\text{)} \\ &= 2x^2 - 26x + 97, \end{aligned}$$

cuya solución es $x = 9$ y $x = 4$. Por lo tanto los puntos de intersección de la circunferencia C con la recta L son: $(9, 3)$ y $(4, -2)$.

3. **Sea $f(x)$ la función definida por**

$$f(x) = \begin{cases} x\,|x| & \textbf{si } x \leq 2 \\ 4x & \textbf{si } x > 2 \end{cases}$$

(a) Bosqueje la gráfica de f. Observe que f puede ser re-escrita de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 4x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(b) **Halle la imagen de** f.
$Im(f) = (-\infty, 4] \cup (8, \infty)$. Ver gráfica en parte (a).
(c) **Diga justificando si** f **es inyectiva o no.**
Como la función es estrictamente creciente (ver gráfica en parte (a)), f es inyectiva y como tal posee inversa.
(d) **Halle la función inversa de** f.

Solución:
Sea g la inversa de f. Entonces,
$g : (-\infty, 4] \cup (8, +\infty) \to R$

$$g(x) = f^{-1}(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{x}{4} & \text{si } x > 8 \end{cases}$$

(e)**Sea** $h(x) = \sqrt{4 - |x|}$**. Encuentre** $f \circ h$.
Solución:
Observando que

$$0 \leq \sqrt{4 - |x|} \leq 2,$$

se tiene:

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = (\sqrt{4 - |x|})^2 = |4 - |x|| = 4 - |x|\,,$$

pues el dominio de la función h es el intervalo $[-2, 2]$.

4. Sean $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = \sqrt{10x - 5}$.
(a) Calcule $H(x) = (g \circ f)(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.
Solución:

$$H(x) = g(f(x)) = \sqrt{10f(x) - 5} = \sqrt{10}\sqrt{sen(x) - 1/2}.$$

(b) **Halle el dominio de** $H(x)$ **en el intervalo** $[0, \pi]$
Solución:

$$\begin{array}{rcl} sen(x) - \dfrac{1}{2} & \geq & 0 \\ sex(x) & \geq & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\pi}{6} & \leq x \leq & \dfrac{5\pi}{6}. \end{array}$$

(c) Rango de H.
$Im(H) = [0, \sqrt{5}]$. Ver examen tipo A1 para el procedimiento.

MA1111.
Enero-Abril 2005.
Examen Tipo B1.
Soluciones.

1. **Resuelva la inecuación** $|x-2| < |3x-4|$
Solución:

$$\begin{array}{rcl} |x-2| &<& |3x-4| \\ (x-2)^2 &<& (3x-4)^2 \\ 2x^2-5x+3 &>& 0 \\ 2(x-3/2)(x-1) &>& 0 \end{array}$$

Entonces, $x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

2. **Sean** L **la recta de ecuación** $y - x + 2 = 0$**,** C **la circunferencia de centro** $D(2,1)$ **y radio** $r = 5$**. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia** C **en el punto de intersección de** C **con** L **que se encuentra en el primer cuadrante.**
Solución:

$$C : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$
$$L : y = x - 2.$$

Primero buscamos los puntos de intersección de C y L,

$$\begin{array}{rcl} 25 = (x-2)^2 + (y-1)^2 &=& (x-2)^2 + (x-3)^2 \\ &=& x^2 - 4x + 4 + x^2 - 6x + 9. \end{array}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos, $x = -1$ y $x = 6$. Descartamos $x = -1$ por no estar en el primer cuadrante. Entonces, $x = 6$ y $y = 6 - 2 = 4$. Es decir, el punto de intersección de L y C es $(6, 4)$.
La pendiente de la recta que pasa por $(2, 1)$ y $(6, 4)$ es: (4-1)/(6-2)=3/4.
Por lo tanto, la recta que buscamos es: $y - 4 = -\frac{4}{3}(x - 6)$.

3. **Sean** g **la función definida por**

$$g(x) = \begin{cases} -2x+9 & \textbf{si } x < 6 \\ \sqrt{x-2}+1 & \textbf{si } x \geq 6 \end{cases}$$

(a) Bosqueje la gráfica de g**.**
Solución:

(b)**Halle el dominio de** g.
Todos los números reales.
(c)**Halle la imagen (rango) de** g.
De la gráfica de la parte (a) se observa que $Im(g) = (-3, \infty)$.
(d)**Diga justificando si** g **es inyectiva o no.**
No es inyectiva pués

$$g(6) = \sqrt{6-2} + 1 = 3$$
$$g(3) = -2(3) + 9 = 3.$$

(e) **Sea** $h(x) = (x-7)^2 + 2$**. Halle** $g \circ h$.

$$(g \circ h)(x) = \begin{cases} -2[(x-7)^2 + 2] + 9 & \text{si } (x-7)^2 + 2 < 6 \\ \sqrt{(x-7)^2} + 1 & \text{si } (x-7)^2 + 2 \geq 6 \end{cases}$$

Resolviendo las desigualdades y simplificando obtenemos que

$$(g \circ h)(x) = \begin{cases} -2(x-7)^2 + 5 & \text{si } 5 < x < 9 \\ |x-7| + 1 & \text{si } x \leq 5 \text{ ó } x \geq 9. \end{cases}$$

4. **Sean** f, g **las funciones definidas por:**

$$f(x) = 3tan(x)$$
$$g(x) = \sqrt{x^2 + 9}$$

(a) Halle la función compuesta $H(x) = (g \circ f)(x)$.
Solución:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)^2 + 9} = \sqrt{9tan^2(x) + 9} = 3\sqrt{sec^2(x)} = 3\left|sec(x)\right|.$$

(b)**Bosqueje la gráfica de** H **en el intervalo** $[0, \pi]$**.**
Solución:

Tome la gráfica de la $sec(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$ y refleje todo lo que este por debajo del eje x para arriba del eje x usando a dicho eje como eje de simetría. Finalmente multiplique por 3.

MA1111.
Enero-Abril 2005.
Examen Tipo B2.
Soluciones.

1. **Resuelva la inecuación** $|x-4| < |3x-8|$
   Solución:

$$\begin{aligned} |x-4| &< |3x-8| \\ (x-4)^2 &< (3x-8)^2 \\ x^2-8x+16 &< 9x^2-48x+64 \\ 8x^2-40x+48 &> 0 \\ x^2-5x+6 &> 0 \\ (x-3)(x-2) &> 0 \end{aligned}$$

   Entonces, la solución es $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$.

2. **Sean** L **la recta de ecuación** $x - y + 2 = 0$**,** C **la circunferencia de centro** $D(1,2)$ **y radio** $r = 5$. **Encuentre la ecuación de la recta tangente a la circunferencia** C **en el punto de intersección de** C **con** L **que se encuentra en el primer cuadrante.**
   Solución:

$$C : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$$
$$L : y = x + 2.$$

   Primero buscamos los puntos de intersección de C y L,

$$\begin{aligned} 25 = (x-1)^2 + (y-2)^2 &= (x-1)^2 + x^2 \\ &= 2x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

   Resolviendo la ecuación cuadrática obtenemos, $x = 4$ y $x = -3$. Descartamos $x = -3$ por no estar en el primer cuadrante. Entonces, $x = 4$ y $y = 4 + 2 = 6$. Es decir, el punto de intersección de L y C es $(4, 6)$.
   La pendiente de la recta que pasa por $(1, 2)$ y $(4, 6)$ es: (6-2)/(4-1)=4/3.
   Por lo tanto, la recta que buscamos es: $y - 6 = -\frac{3}{4}(x - 4)$.

3. **Sean** g **la función definida por**

$$g(x) = \begin{cases} -2x + 9 & \textbf{si } x < 6 \\ \sqrt{x-2} + 1 & \textbf{si } x \geq 6 \end{cases}$$

(a) Bosqueje la gráfica de g.
Solución:

(b)**Halle el dominio de g.**
Todos los números reales.
(c)**Halle la imagen (rango) de g.**
De la gráfica de la parte (a) se observa que $Im(g) = (-3, \infty)$.
(d)**Diga justificando si g es inyectiva o no.**
No es inyectiva pués

$$g(6) = \sqrt{6-2} + 1 = 3$$
$$g(3) = -2(3) + 9 = 3.$$

(e) **Sea $h(x) = (x-7)^2 + 2$. Halle $g \circ h$.**

$$(g \circ h)(x) = \begin{cases} -2[(x-7)^2+2]+9 & \text{si } (x-7)^2+2 < 6 \\ \sqrt{(x-7)^2} + 1 & \text{si } (x-7)^2+2 \geq 6 \end{cases}$$

Resolviendo las desigualdades y simplificando obtenemos que

$$(g \circ h)(x) = \begin{cases} -2(x-7)^2+5 & \text{si } 5 < x < 9 \\ |x-7| + 1 & \text{si } x \leq 5 \text{ ó } x \geq 9. \end{cases}$$

4. **Sean f, g las funciones definidas por:**

$$f(x) = 2tan(x)$$
$$g(x) = \sqrt{x^2+4}$$

(a) Halle la fucnión compuesta $H(x) = (g \circ f)(x)$.
Solución:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)^2+4} = \sqrt{4tan^2(x)+4} = 2\sqrt{sec^2(x)} = 2\,|sec(x)|\,.$$

(b)**Bosqueje la gráfica de H en el intervalo $[0, \pi]$.**
Solución:
Tome la gráfica de la $sec(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$ y refleje todo lo que este por debajo del eje x para arriba del eje x usando a dicho eje como eje de simetría. Finalmente, multiplique por 2.

MA1111.
Enero-Abril 2005.
Examen Tipo C1.
Soluciones.

1. **Resuelva** $\frac{x+1}{|x+2|-x} \leq 2$.
Solución: Usando la definición del valor absoluto

$$|x-2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$$

. Caso No. 1:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x+2-x} \leq 2 & \text{solución } S_1 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} \leq 2 & \text{solución } S_1 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

.

$$\begin{cases} x \leq 3 & \text{solución } S_1 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Por lo que $S_1 = [-2, 3]$.
Caso No. 2:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{-x-2-x} \leq 2 & \text{solución } S_2 \\ x < -2 \end{cases}$$

.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{-2(x+1)} \leq 2 & \text{solución } S_2 \\ x < -2 \end{cases}$$

.

$$\begin{cases} \frac{-1}{2} \leq 2 & \text{solución } S_2 \\ x \neq -1 \\ x < -2 \end{cases}$$

Por lo que $S_2 = [-\infty, -2)$.
Solución final $S_1 \cup S_2 = (-\infty, 3]$.

2. **Sean** L_1 **y** L_2 **las dos rectas de ecuaciones** $4y+2x = 20$ **y** $2y+x = 0$**.**
(a) Verifique que L_1 **y** L_2 **son paralelas.**
Solución:
De la ecuación de L_1 tenemos que $y = -\frac{1}{2}x + 5$ y de la de L_2 obtenemos $y = -\frac{1}{2}x$. Como las pendientes son ambas iguales a -1/2, las rectas son paralelas.
(b)**Halle la ecuación de la circunferencia** C **que es tangente a ambas rectas y además es tangente a la recta** L_1 **en el punto** $A(4, 3)$.

Solución:
Sea r la recta que pasa por el punto A y que es perpendicular a ambas rectas. Claramente, r tiene por ecuación $y = 2x-5$. Si B es la intersección de r con L_2, entonces la circunferencia C tiene diámetro AB. Intersectando las rectas r y L_2 obtenemos que B es el punto $(2,-1)$. El centro de la circunferencia es el punto medio entre A y B. Es decir, la ecuación de la circunferencia C es

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5.$$

3. **Sean h y g las funciones definidas por**

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \textbf{si } |x| \leq 2 \\ x & \textbf{si } |x| > 2 \end{cases}$$

y $g(x) = \frac{x}{|x|}$.
(a) Bosqueje la gráfica de h.
Solución:

(b) Halle la imagen de h.
$Im(h) = (-\infty,-2) \cup [-1,1] \cup (2,\infty)$. Vea la gráfica en la parte (a)
(c) **Diga justificando si h es o no inyectiva.**
Es inyectiva ya que todas las rectas paralelas al eje x intersectan la gráfica en un único punto.
(d) **Halle imagen y dominio de** g
Observe que la función g puede ser re-escrita de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, $Dom(g) = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ e $Im(g) = \{1,-1\}$
(e)**Encuentre** $h \circ g$.
Solución:
Como los valores que toma g son 1 y -1 entonces $|g(x)| \leq 2$,

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \frac{g(x)}{2} = \frac{x}{2\,|x|}.$$

4. **Sean** $f(x) = sen(x)$, $h(x) = x - \frac{\pi}{2}$ **y** $g(x) = x + 1$.
(a) Encuentre $2(g \circ f \circ h)$.
Solución:

$$2(g\circ f\circ h)(x) = 2g(f(h(x))) = 2g\left(f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2g\left(sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)+2$$

(b)**Grafique** $2(g \circ f \circ h)$. **en el intervalo** $[-\pi, \pi]$**.**

(c) Encuentre la función $(h/g)(x)$**.**
Solución:

$$(h/g)(x) = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{x - \pi/2}{x+1},$$

para $x \neq -1$.
(d) **Encuentre la inversa de** h/g **si existe. Justifique su respuesta.**
Solución:
Supongamos por el absurdo, que existen números reales x_1 y x_2 con $x_1 \neq x_2 \neq -1$ tal que $h/g(x_1) = h/g(x_2)$. Es decir,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x_1 - \pi/2}{x_1 + 1} & = & \dfrac{x_2 - \pi/2}{x_2 + 1} \quad \Longleftrightarrow \\ (x_1 - \pi/2)(x_2 + 1) & = & (x_2 - \pi/2)(x_1 + 1) \quad \Longleftrightarrow \\ x_1x_2 + x_1 - x_2\pi/2 - \pi/2 & = & x_2x_1 + x_2 - x_1\pi/2 - \pi/2 \quad \Longleftrightarrow \\ x_1(1 + \pi/2) & = & x_2(1 + \pi/2) \quad \Longleftrightarrow \\ x_1 & = & x_2, \end{array}$$

lo cual es una contradicción pues asumimos que $x_1 \neq x_2$. Por lo tanto, h/g es inyectiva y como tal tiene inversa.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{x - \pi/2}{x+1} && x \neq -1 \\
x &= \frac{y - \pi/2}{y+1} && y \neq -1 \\
x(y+1) &= y - \pi/2 && y \neq -1 \\
(x-1)y &= -x - \pi/2 && y \neq -1 \\
(h/g)^{-1}(x) &= -\frac{x + \pi/2}{x-1} && y \neq -1, x \neq 1.
\end{aligned}
$$

MA1111.
Enero-Abril 2005.
Examen Tipo C2.
Soluciones.

1. **Resuelva** $\frac{x+1}{|x+2|-x} \leq 3$.
Solución: Usando la definición del valor absoluto

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$$

. Caso No. 1:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x+2-x} \leq 3 & \text{solución } S_1 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} \leq 3 & \text{solución } S_1 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

.

$$\begin{cases} x \leq 5 & \text{solución } S_1 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Por lo que $S_1 = [-2, 5]$.
Caso No. 2:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{-x-2-x} \leq 3 & \text{solución } S_2 \\ x < -2 \end{cases}$$

.

$$\begin{cases} \frac{x+1}{-2(x+1)} \leq 3 & \text{solución } S_2 \\ x < -2 \end{cases}$$

.

$$\begin{cases} \frac{-1}{2} \leq 3 & \text{solución } S_2 \\ x \neq -1 \\ x < -2 \end{cases}$$

Por lo que $S_2 = (-\infty, -2)$.
Solución final $S_1 \cup S_2 = (-\infty, 5]$.

2. **Sean L_1 y L_2 las dos rectas de ecuaciones** $4x+2y = 20$ **y** $2x+y = 0$**.**
(a) Verifique que L_1 y L_2 son paralelas.
Solución:
De la ecuación de L_1 tenemos que $y = 10 - 2x$ y de la de L_2 obtenemos $y = -2x$. Como las pendientes son ambas iguales a -2, las rectas son paralelas.
(b)**Halle la ecuación de la circunferencia C que es tangente a ambas rectas y además es tangente a la recta L_1 en el punto** $A(3, 4)$.

Solución:
Sea r la recta que pasa por el punto A y que es perpendicular a ambas rectas. Claramente, r tiene por ecuación $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Si B es la intersección de r con L_2, entonces la circunferencia C tiene diámetro AB. Intersectando las rectas r y L_2 obtenemos que B es el punto $(-1, 2)$. El centro de la circunferencia es el punto medio entre A y B. Es decir, la ecuación de la circunferencia C es

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5.$$

3. **Sean h y g las funciones definidas por**

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \textbf{si } |x| \leq 3 \\ x & \textbf{si } |x| > 3 \end{cases}$$

y $g(x) = \frac{x}{|x|}$.
(a) Bosqueje la gráfica de h.
Solución:

(b) Halle la imagen de h.
$Im(h) = (-\infty, -3) \cup [-3/2, 3/2] \cup (3, \infty)$. Vea la gráfica en la parte (a)
(c) **Diga justificando si** h **es o no inyectiva.**
Es inyectiva ya que todas las rectas paralelas al eje x intersectan la gráfica en un único punto.
(d) **Halle imagen y dominio de** g
Observe que la función g puede ser re-escrita de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, $Dom(g) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e $Im(g) = \{1, -1\}$
(e)**Encuentre** $h \circ g$.
Solución:
Como los valores que toma g son 1 y -1 entonces $|g(x)| \leq 3$,

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = \frac{g(x)}{2} = \frac{x}{2|x|}.$$

4. **Sean** $f(x) = sen(x)$, $h(x) = x - \frac{\pi}{2}$ **y** $g(x) = x + 1$.
(a) Encuentre $2(g \circ f \circ h)$.
Solución:

$$2(g{\circ}f{\circ}h)(x) = 2g(f(h(x))) = 2g\left(f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2g\left(sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right){+}2$$

(b)**Grafique** $2(g \circ f \circ h)$. **en el intervalo** $[0, 2\pi]$**.**

(c) Encuentre la función $(g/h)(x)$**.**
Solución:

$$(g/h)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{x+1}{x - \pi/2},$$

para $x \neq \pi/2$.
(d) **Encuentre la inversa de** g/h **si existe. Justifique su respuesta.**
Solución:
Supongamos por el absurdo, que existen números reales x_1 y x_2 con $x_1 \neq x_2 \neq \pi/2$ tal que $g/h(x_1) = g/h(x_2)$. Es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{x_1+1}{x_1-\pi/2} &= \frac{x_2+1}{x_2-\pi/2} \quad \Longleftrightarrow \\
(x_1-\pi/2)(x_2+1) &= (x_2-\pi/2)(x_1+1) \quad \Longleftrightarrow \\
x_1x_2 + x_1 - x_2\pi/2 - \pi/2 &= x_2x_1 + x_2 - x_1\pi/2 - \pi/2 \quad \Longleftrightarrow \\
x_1(1+\pi/2) &= x_2(1+\pi/2) \quad \Longleftrightarrow \\
x_1 &= x_2,
\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción pues asumimos que $x_1 \neq x_2$. Por lo tanto, h/g es inyectiva y como tal tiene inversa.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{x+1}{x-\pi/2} && x \neq \pi/2 \\
x &= \frac{y+1}{y-\pi/2} && y \neq \pi/2 \\
x(y-\pi/2) &= y+1 && y \neq \pi/2 \\
(x-1)y &= \frac{\pi}{2}x+1 && y \neq \pi/2 \\
(g/h)^{-1}(x) &= \frac{\frac{\pi}{2}x+1}{x-1} && y \neq \pi/2, x \neq 1.
\end{aligned}$$